Initiation à l'algèbre linéaire

Rémy Malgouyres
Laboratoire d'Algorithmique et d'Image de Clermont-Ferrand, IUT, département info
B.P. 86
63172 AUBIERE cedex
http ://laic.u-clermont1.fr/~mr

Table des matières

1 Définition d'un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$)

Un $\mathbb{R}-$espace vectoriel est la donnée de $(E, +, .)$ avec :

- E est un ensemble;
- L'opérateur d'addition $+$ est une opération associative, commutative sur E, qui admet un élément neutre noté 0;
  $v + (v' + v'') = (v + v') + v''$ $\quad v + v' = v' + v$ $\quad 0 + v = v + 0 = v$
- L'opération . est une opération externe qui à un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ et un élément $v \in E$ associe un élément $\lambda.v$ de E. Cette opération est distributive par rapport à l'addition.
  $\lambda.(\lambda'.v) = (\lambda.\lambda').v$ $\quad \lambda(v + v') = \lambda v + \lambda v'$

Exemples

1. $\mathbb{R}^n$.
2. L'ensemble $\mathbb{R}_n(X)$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
3. L'ensemble de tous les polynômes.
4. L'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$.

2 Système libre, système générateur, base

Définition 2.1 Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille d'éléments de E. On dit que la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est *libre* si pour toute combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

on a nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$.

Exemple 2.1 *Dans l'espace des polynômes, la famille* $(1, X, X^2, X^3, \ldots, X^p)$ *est libre*

Exemple 2.2 *la famille de fonctions* $(\sin, \cos)$ *est libre.*

Définition 2.2 Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. Soit $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille d'éléments de E. On dit que la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est *génératrice* si tout élément de E est une combinaison linéaire des v_i

$$\forall v \in E \; \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \;\; v = \lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p$$

Exemple 2.3 *Dans l'ensemble* $\mathbb{R}_n(X)$ *des polynomes de degré inférieur ou égal à* n*, la famille* $(1, X, \ldots, X^n)$ *est génératrice.*

Définition 2.3 Une base d'un espace vectoriel E est un système libre et générateur.

Définition 2.4 Un espace est dit de dimention finie si il admet une base ayant un nombre fini d'éléments.

Théorème 2.1 (de la dimension)
1. *Tout espace vectoriel admet une base.*
2. *Dans un espace vectoriel, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.*

Définition 2.5 Le nombre d'éléments d'une base d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ s'appelle la *dimention* de E.

Exemple 2.4 *Dans l'ensemble* $\mathbb{R}_n(X)$ *des polynomes de degré inférieur ou égal à* n*, la famille* $(1, X, \ldots, X^n)$ *est une base. L'espace* $\mathbb{R}_n(X)$ *est de dimension* $n + 1$.

Exemple 2.5 *Dans* $\mathbb{R}^n$*, la famille* $e_1, \ldots, e_n$ *telle quie la* j*ième coordonnée de* e_i *vaut* 1 *si* $i = j$ *et* 0 *si* $i \neq j$ *est une base. Cette base s'appelle la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

3 Sous-espaces vectoriels

Définition 3.1 Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel et $F \subset E$ une partie de E. On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\forall v, v' \in F \quad v + v' \in F$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall v \in F, \quad \lambda v \in F$.

Autrement dit, F est stable par addition et par multiplication par un nombre.

Théorème 3.1 *Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Alors $(F, +, .)$ est un espace vectoriel.*

Exemple 3.1 *Dans l'ensemble des polynômes $\mathbb{R}^n(X)$ de degré n, l'ensemble $\mathbb{R}^p(X)$, avec $p \leq n$ est un sous-espace vectoriel.*

Exemple 3.2 *Dans l'espace $(\mathbb{R}^n, +, .)$, considérons un système linéeaire : pour $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & 0 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{p,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{p,n}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

Alors l'ensemble des solutions $(x_1, \ldots, x_n)$ du système est un sous-espace vectoriel.

4 Endomorphismes

Définition 4.1 On appelle *endomorphime* (ou application lnéaire) d'un espace vectoriel $(E, +, v)$ dans un espace vectoriel $(F, +, v)$ toute application f de E dans F telle que pour tout $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ et pour tout $v, v' \in E$ on ait

$$f(\lambda v + \lambda' v') = \lambda f(v) + \lambda' f(v')$$

Définition 4.2 Soit $f : E \longrightarrow F$ un endomorphisme. On définit le *noyau* de f, et on note $ker(f)$, l'ensemble des vecteurs v de E tels que $f(v) = 0$.

Théorème 4.1
1. *Le noyau d'un endomorphisme est un sous-espace vectoriel ;*
2. *Un endomorphisme est injectif (c'est à dire que $f(v) = f(v') \iff v = v'$) si et seulement si son noyau est réduit à 0.*

Définition 4.3 Soit $f : E \longrightarrow F$ un endomorphisme. On définit l'*image* de f qui est l'ensemble des éléments $f(v)$ dans F.

$$Im(f) = \{f(v) \in F \ / \ v \in E\}$$

Théorème 4.2 *L'image d'un endomorphisme $f : E \longrightarrow F$ est un sous-espace vectoriel de F.*

Théorème 4.3 *La composée $f \circ g$ de deux endomorphismes est un endomorphisme.*

Définition 4.4 Un endomorphisme est appelé *isomorphisme* s'il est bijectif, c'est à dire qu'il est injectif et surjectif.

Théorème 4.4 *Pour tout isomorphisme $f : E \longrightarrow F$, il existe un isomorphisme $f^{-1} : F \longrightarrow E$ tel que*

$$f \circ f^{-1} = Id_F \text{ et } f^{-1} \circ f = Id_E$$

Théorème 4.5 *Soit $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme. Alors l'image par f d'une base de E est un base de F. En d'autre termes, si $(v_1, \dots, v_p)$ est une base de E, alors $(f(v_1), \dots, f(v_p))$ est une base de F. En particulier, les espaces E et F on même dimension.*

Théorème 4.6 *Soit $f : E \longrightarrow F$ un endomorphisme. Supposons que la dimention de E est égale à la dimension de F :*

$$dim(E) = dim(F)$$

Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. *f est injectif;*
2. *f est surjectif;*
3. *f est un isomorphisme.*

5 Matrice d'un endomorphisme

Soit $f : E \longrightarrow F$ un endomorphisme. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ une base de E et soit $(w_1, \dots, w_n)$ une base de F.

Pour $j = 1, \dots, m$, l'image $f(v_j)$ du vecteur v_j, étant un élément de F, est une combinaison linéaire des vecteurs de la base des (w_i). Il existe donc des nombres réels $\lambda_{i,j}$ tels que :

$$f(v_j) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{i,j} w_i$$

La matrice $M_f = (\lambda_{i,j})_{i=0,\dots,n,j=0,\dots,m}$, dont le coefficient de la ligne i colonne j est $\lambda_{i,j}$, s'appelle la *matrice de l'endomorphisme f dans les bases $(v_j)_{j=0,\dots,m}$ et $(w_i)_{i=0,\dots,n}$*.

Si un vecteur v de E a pour coordonnées $(x_1, \dots, x_m)$ dans la base $(v_j)_{j=0,\dots,m}$, et $f(v)$ a pour coordonnées $(y_1, \dots, y_m)$ dans la base $(w_i)_{i=0,\dots,n}$, on a :

$$v = \sum_{j=0}^{m} x_j v_j$$

donc, comme f est un endomorphisme,

$$f(v) = \sum_{j=0}^{m} x_j f(v_j) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} \lambda_{i,j} x_j w_i = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} \lambda_{i,j} x_j \right) w_i$$

Par ailleurs,

$$f(v) = \sum_{i=0}^{n} y_i w_i$$

Comme la décomposition d'un vecteur dans la base $(w_i)_{i=0,\dots,n}$ est unique (famille libre), on a nécessairement pour $i = 1, \dots, n$:

$$y_i = \sum_{j=0}^{m} \lambda_{i,j} x_j$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M_f . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de l'image par f d'un vecteur v se calculent donc à partir des coordonnées de v en multipliant par la matrice M.

Théorème 5.1 *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des endomorphismes, soit $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ est une base de E, soit $(w_1, \dots, w_n)$ une base de F et soit $z_1, \dots, z_p$ une base de G. Soit M_f la matrice de f dans les bases (v_j) et (w_i) et soit M_g la matrice de g dans les bases (w_i) et (z_k), alors si $M_{f \circ g}$ est la matrice de l'endomorphismes $f \circ g$ dans les bases (v_j) et (z_k), on a :*

$$M_{f \circ g} = M_f . M_g$$

Théorème 5.2 *Soit $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme et soient $(v_1, v_2, \dots, v_m)$ est une base de E, et $(w_1, \dots, w_n)$ une base de F. Soit M_f la matrice de f dans les bases (v_j) et (w_i). Soit f^{-1} l'isomorphisme tel que $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$. Soit $M_{f^{-1}}$ la matrice de l'endomorphisme f^{-1} dans les bases (w_i) et (v_j). Alors :*

$$M_{f^{-1}} = (M_f)^{-1}$$

Autrement dit, la matrice de l'endomorphisme inverse de f est l'inverse de la matrice de f.